הרצאה מספר 20
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: בסיס ומימד של מרחב וקטורי

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.12 למת ההחלפה

- <u>טענה (למת ההחלפה):</u> יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית.
  - תהי $A \subseteq V$ קבוצה בת"ל ב־ V.
  - תהי $B \subseteq V$ קבוצה פורשת של V.
  - ויהי $v \in A$.

אזי קיים וקטור $w \in B$ כך שהקבוצה $(A \setminus \{v\}) \cup \{w\}$ היא בת"ל.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.13 גודל קבוצות: |פורשת| $\leq$ |בלתי תלוי|

- <u>טענה:</u> יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית.
  - תהי $A = \{ v_1, v_2, \ldots, v_m \} \subseteq V$ קבוצה בת"ל ב־ V.
  - תהי $B = \{ u_1, u_2, \ldots, u_n \} \subseteq V$ קבוצה פורשת של V.

  אזי $m = |A| \leq |B| = n$.

- <u>הוכחה:</u> נפעיל שוב ושוב את למת ההחלפה כדי להחליף אברים מ־A באברים מ־ B מבלי לפגוע באי־תלות הקבוצה.
  - נגדיר $A_0 = A$.
  - עבור $k = 1, 2, \ldots, m$:
    - אם $v_k \in B$ נגדיר $A_k = A_{k-1}$. (האיבר כבר ב־ B).
    - אם $v_k \notin B$, לפי למת ההחלפה ביחס ל־ A_{k-1}, B, v_k קיים $w_k \in B$ כך ש־ $A_k = (A_{k-1} \setminus \{v_k\}) \cup \{w_k\}$ היא בת"ל.
  - הקבוצה A_m בסיום התהליך היא תת־קבוצה של B.
  - לכן $m = |A| = |A_m| \leq |B| = n$. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.14 הגדרת בסיס ומימד

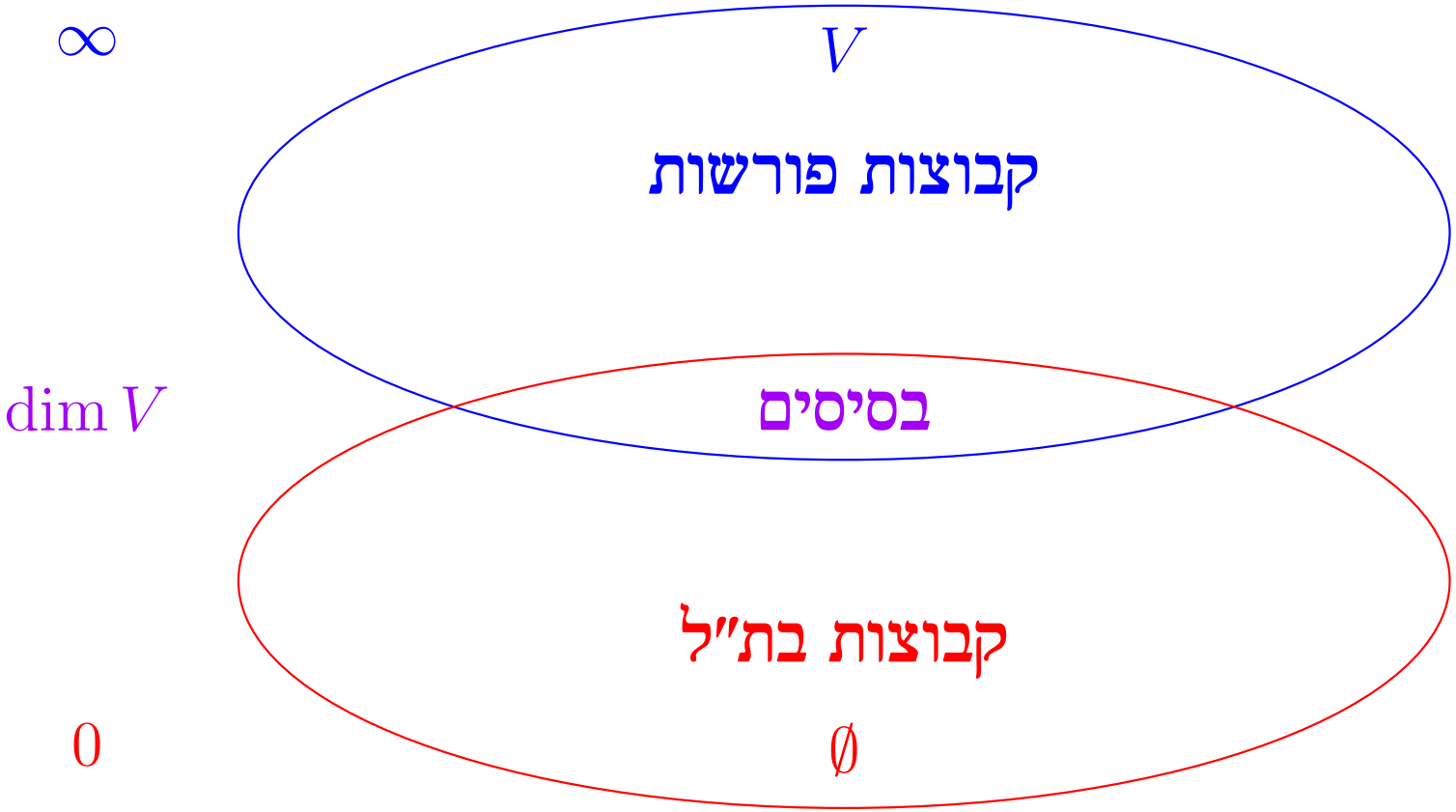
- הגדרה: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F, קבוצה (סופית) $S \subseteq V$ שהיא גם בת"ל וגם פורשת נקרא בסיס של V (a basis of V).

- טענה: יהיו A, B שני בסיסים של V. אזי $|A| = |B|$.
- הוכחה:
  - A בת"ל ו־ B פורשת, ולכן $|A| \leq |B|$.
  - B בת"ל ו־ A פורשת, ולכן $|B| \leq |A|$.
  - לכן, $|A| = |B|$. $\square$

- הגדרה: יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F. $\dim V$ המימד (dimension) של V הוא הגודל של בסיס של V.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.14 הגדרת בסים ומימד



©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.15 F^n: בסיס סטנדרטי ומימד

- <u>דוגמה:</u> $V = F^n$ (מעל השדה F).
- $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ נקרא הבסיס הסטנדרטי של F^n.
- כבר ראינו שזו קבוצה פורשת.
- נניח ש־ $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
- $\alpha_i = 0$ לכל i. לכן הקבוצה בת"ל.
- פורשת + בת"ל = בסיס.
- <u>מסקנה:</u> $\dim F^n = n$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.16 $F_n[x]$ נוצר סופית

- <u>דוגמה:</u> $V = F_n[x]$ (מעל השדה F).
- $S = \{1 = x^0, x = x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, הבסיס הסטנדרטי של $F_n[x]$.
- כבר ראינו שזו קבוצה פורשת.
- נניח ש־ $0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$.
- $\alpha_i = 0$ לכל i. לכן הקבוצה בת"ל.
- פורשת + בת"ל = בסיס.
- <u>מסקנה:</u> $\dim F_n[x] = n + 1$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.17 $M_{m\times n}(F)$: בסיס סטנדרטי ומימד

- <u>דוגמה:</u> $V = M_{m\times n}(F)$ (מעל השדה F).
- נגדיר E_{ij} כמטריצה מסדר $m \times n$ שבאיבר i, j מופיע 1 ובכל איבר אחר יש 0.
- $S = \{E_{ij} \ : \ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$, הבסיס הסטנדרטי
- זו קבוצה פורשת: $A = (a_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$.
- נניח ש־ $0_{m\times n} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}E_{ij}$.
- $\alpha_{ij} = 0$ לכל i, j. לכן הקבוצה בת"ל.
- פורשת + בת"ל = בסיס.
- <u>מסקנה:</u> $\dim M_{m\times n}(F) = m \cdot n$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.18 בסיס נוסף ל־ $\mathbb{R}^3$

- <u>דוגמה:</u> ראינו בעבר שהקבוצה S הבאה היא בת"ל.

$$V=\mathbb{R}^3, \quad S=\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

- בוא נבדוק שזה גם בסיס של $\mathbb{R}^3$. צריך לבדוק שזו קבוצה פורשת.
- צריך לחפש פתרון למערכת: $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$
- הפתרון היחיד הוא: $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-x+y+z)/2\\(\quad x-y+z)/2\\(\quad x+y-z)/2\end{pmatrix}$
- יש פתרון לכל (x,y,z) ובכך S קבוצה פורשת.
- מכיון ש־S בת"ל ופורשת היא בסיס של $\mathbb{R}^3$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.18 בסיס נוסף ל־ $\mathbb{R}^3$

- **דירוג:**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & z-y \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & -2 & z-x-y \end{array}\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} R_1 \to R_1 + (1/2)R_3 \\ R_2 \to R_2 + (1/2)R_3 \\ R_3 \to (-1/2)R_3 \end{array}\right\} \underset{\star}{\to} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (-x+y+z)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (\ \ x-y+z)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (\ \ x+y-z)/2 \end{array}\right)$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.19 בסיסים לתתי מרחב ממימד קטן של F^n

- נתעניין בתתי־מרחב של F^n (מומלץ לחשוב על $F = \mathbb{R}$).
- הבסיס של $V = \{\vec{0}\}$ הוא הקבוצה הריקה. (מימד 0)
- לכל מחרחב מהצורה F^n, ולכל $v \in F^n \setminus \{\vec{0}\}$ תת המרחב $\mathrm{Span}(\{v\})$ היא ישר דרך הראשית.
- בסיס של ישר (דרך הראשית) הוא קבוצה שמכיל נקודה אחד מהישר (שאינו 0). (מימד 1)
- בסיס של מישור (דרך הראשית) הוא קבוצה שמכיל שתי נקודות שהישר דרכן אינו עובר בראשית. (מימד 2)
- אומרים שצריכים 2 נקודות לקבוע ישר, 3 נקודות לקבוע מישור, וכו'. לאן "ברחה" הנקודה הנוספת שאינה כלולה בבסיס?
- הראשית, $\vec{0}$, נמצא בכל תת־מרחב, ואסור לצרף אותו לבסיס.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.20 בסיס למטריצות סימטריות מסדר 2

- נתעניין באוסף המטריצות הסימטריות מסדר 2.
- האיבר הכללי הוא $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
- הקבוצה הבאה היא בסיס:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- המימד הוא 3.

- ניתן להכליל למטריצות סימטריות מסדר n.
- המימד הוא $n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.21 בסיס למטריצות אנטי־סימטריות מסדר 2

- נתעניין באוסף המטריצות האנטי־סימטריות מסדר 2.
- האיבר הכללי הוא $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$.
- הקבוצה הבאה היא בסיס:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- המימד הוא 1.

- ניתן להכליל למטריצות אנטי־סימטריות מסדר n.
- המימד הוא $(n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.22 מימד מרחב השורה של מטריצה

- נתעניין במרחב השורה של מטריצה A.
- כמובן שהשורות של A שאינן אפס פורסות את מרחב השורה.
- כמו כן, השורות שאינן אפס בכל מטריצה שקולת שורה ל־A גם פורסות את מרחב השורה.
- <u>טענה:</u> השורות שאינן אפס של מטריצה מדורגת הן בת"ל.
- <u>מסקנה:</u> המימד של מרחב השורה של A הוא $\mathrm{rank}(A)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

5.23 מימד מרחב הפתרונות למערכת הומוגנית

- נתעניין באוסף הפתרונות של מערכת משואות לינארית הומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$.
- $\mathrm{rank}(A)$ הוא מספר השורות שאינם אפס בצורה הקנונית.
- יש $f = n - \mathrm{rank}(A)$ משתנים חופשיים.
- אפשר לייצג את הפתרון הכללי כצירוף לינארי של פתרונות בהן רק משתנה חופשי אחד הוא 1 והשאר הן 0.
- דוגמה: הפתרון כללי של $x + y + z = 0$

$$(x, y, z) = (-\alpha - \beta, \alpha, \beta) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1)$$

- $\dim S(A, \vec{0}) = n - \mathrm{rank}(A)$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות